BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2006

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ПОЛУЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА .I.

М.Г.МАХМУДОВА

Бакинский Государственный Университет

Работа посвящена изучению вопросов существования и единственности обобщенного решения одномерной смешанной задачи для одного полулинейного уравнения Буссинеска четвертого порядка. Введено понятие обобщенного решения изучаемой смешанной задачи. После применения метода Фурье решение исходной задачи сведено к решению некоторой счетной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов Фурье $u_n(t)$ $(n=1,2,\ldots)$ *по системе* $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ *искомого решения* $u(t,x)$. *Далее, доказаны: теорема о единственности в целом, теорема существования в малом и теорема существования в целом обобщенного решения рассматриваемой смешанной задачи.*

В работе изучаются вопросы существования и единственности обобщенного решения следующей одномерной смешанной задачи:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - 2\alpha u_{txx}(t,x) + u_{xxxx}(t,x) = F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x), \\ \qquad\qquad u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x)) \quad (0 \le t \le T,\ 0 \le x \le \pi), & (1) \\ u(0,x) = \varphi(x) \quad (0 \le x \le \pi), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \quad (0 \le x \le \pi), & (2) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,\pi) = 0 \quad (0 \le t \le T), & (3) \end{cases}$$

где $0 < \alpha < 1$; $0 < T < +\infty$; F,φ,ψ –заданные функции, а $u(t,x)$ –искомая функция, причём под обобщенным решением задачи (1)-(3) понимаем следующее

Определение. Под обобщенным решением задачи (1)-(3) понимаем функцию $u(t,x)$, обладающую свойствами:

а) $u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x), u_t(t,x) \in C([0,T]\times[0,\pi])$;
$u_{xxx}(t,x), u_{tx}(t,x) \in C([0,T];L_2(0,\pi))$;

б) все начальные и граничные условия (2) и (3) удовлетворяются в обычном смысле;

в) выполняется интегральное тождество

$$\int_0^T\int_0^\pi \{u_t(t,x)\cdot V_t(t,x) - 2\alpha u_{tx}(t,x)\cdot V_x(t,x) + u_{xxx}(t,x)\cdot V_x(t,x) +$$

$$+\mathsf{F}(u(t,x))\cdot V(t,x)\}dxdt + \int_0^\pi \psi(x)\cdot V(0,x)dx = 0 \qquad (4)$$

для любой функции $V(t,x)$, обладающей свойствами

$$V(t,x)\in C([0,T]\times[0,\pi]),\, V_t(t,x)\in L((0,T)\times(0,\pi)),\, V_x(t,x)\in L([0,T];L_2(0,\pi)), \quad (5)$$

$$V(T,x)=0 \quad (0\le x\le\pi), \quad V(t,0)=V(t,\pi)=0 \quad (0\le t\le T), \qquad (6)$$

где

$$\mathsf{F}(u(t,x)) \equiv F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x)). \quad (7)$$

§1. Вспомогательные факты

С целью исследования обобщенного решения задачи (1)-(3) приведем некоторые известные факты и установим ряд новых вспомогательных фактов.

1. Так как система $\{\sin nx\}_{n=1}^\infty$ образует базис в пространстве $L_2(0,\pi)$, то очевидно, что каждое обобщенное решение $u(t,x)$ задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^\infty u_n(t)\sin nx, \qquad (8)$$

где

$$u_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(t,x)\sin nx\,dx \quad (n=1,2,\ldots;\ t\in[0,T]). \qquad (9)$$

Тогда, после применения формальной схемы метода Фурье, нахождение функций $u_n(t)$ $(n=1,2,\ldots)$ сводится к решению следующей счетной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$u_n(t) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\cdot\sin\sqrt{1-\alpha^2}\,n^2t + \cos\sqrt{1-\alpha^2}\,n^2t\right)\cdot e^{-\alpha n^2 t}\cdot\varphi_n + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}\cdot n^2}\times$$

$$\times\sin\sqrt{1-\alpha^2}\,n^2t\cdot e^{-\alpha n^2 t}\cdot\psi_n + \frac{2}{\pi\sqrt{1-\alpha^2}\cdot n^2}\cdot\int_0^t\int_0^\pi \mathsf{F}(u(\tau,x))\sin nx\times$$

$$\times e^{-\alpha n^2(t-\tau)}\cdot\sin\sqrt{1-\alpha^2}\,n^2(t-\tau)dxd\tau \quad (n=1,2,\ldots;\ t\in[0,T]), \qquad (10)$$

где

$$\varphi_n \equiv \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx\,,\qquad \psi_n \equiv \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(x)\sin nx\,dx\ \ (n=1,2,\ldots)\,. \tag{11}$$

2. Исходя из определения обобщенного решения задачи (1)-(3) легко доказывается следующая

Лемма. Если $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx$ – любое обобщенное решение задачи (1)-(3), то функции $u_n(t)$ $(n=1,2,\ldots)$ удовлетворяют системе (10).

3. Обозначим через $B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ совокупность всех функций $u(t,x)$ вида

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\,,$$

рассматриваемых на $[0,T]\times[0,\pi]$, для которых все функции $u_n(t)\in C^{(l)}(0,T)$ и

$$J_T(u)\equiv\sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}|u_n^{(i)}(t)|\right)^{\beta_i}\right\}^{1/\beta_i}<+\infty\,,$$

где $l\ge 0$ – целое число, $\alpha_i\ge 0$ $(i=\overline{0,l})$, $1\le\beta_i\le 2$ $(i=\overline{0,l})$. Норму в этом множестве определим так: $\|u\|=J_T(u)$. Известно (см. [1]), что все эти пространства банаховы.

В дальнейшем для функций $u(t,x)\in B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ будем пользоваться обозначениями:

$$\|u\|_{B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,t}}\equiv\sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_n^{(i)}(\tau)|\right)^{\beta_i}\right\}^{1/\beta_i}\qquad(0\le t\le T)\,. \tag{12}$$

4. Для функции $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\in B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ функцию $u_n(t)$ назовем ее n-той компонентой. Пусть M –любое непустое множество из пространства $B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$. Совокупность n-тых компонент всех функций из M обозначим через M_n. Справедлива (см. [1]) следующая

Теорема 1. Для компактности множества $\mathrm{M}\subset B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ в $B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

а) для каждого фиксированного n $(n=1,2,\ldots)$ множество M_n компактно в $C^{(l)}([0,T])$;

б) для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_ε, один и тот же для всех $u(t,x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx \in \mathrm{M}$, такой, что

$$\sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty}(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}|u_n^{(i)}(t)|)^{\beta_i}\right\}^{1/\beta_i} < \varepsilon \quad \forall u \in \mathrm{M}.$$

5. Очевидно, что если $u(t,x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx \in B_{2,T}^k$ ($k \ge 1$ – целое число), то $\forall t \in [0,T]$:

$$\|u\|_{B_{1,t}^{k-1}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)| \le$$

$$\le\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right\}^{1/2}\cdot\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(n^k\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)|)^2\right\}^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot\|u\|_{B_{2,t}^k}. \quad (13)$$

Отсюда, в частности, следует, что:

$$\forall u \in B_{2,2,T}^{i,j} \quad \|u\|_{B_{1,1,t}^{i-1,j-1}} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot\|u\|_{B_{2,2,t}^{i,j}} \quad (i,j \ge 1; 0 \le t \le T). \quad (14)$$

6. Пусть для натурального числа k:

$$\varphi(x) \in C^{(k-1)}([0,\pi]),\ \varphi^{(k)}(x) \in L_2(0,\pi),\ \varphi^{(2s)}(0) = \varphi^{(2s)}(\pi) = 0 \quad \left(s = \overline{0,\left[\frac{k-1}{2}\right]}\right). \quad (15)$$

Тогда, с помощью интегрирования по частям, пользуясь неравенством Бесселя (для нечетного k) и равенством Парсевалля (для четного k), легко получить, что:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^k\cdot\varphi_n)^2 \le \frac{2}{\pi}\cdot\|\varphi^{(k)}(x)\|_{L_2(0,\pi)}^2, \quad (16)$$

где $\varphi_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx$ $(n = 1,2,\ldots)$, причем, очевидно, что оценка (16) верна и при $k = 0$.

§2. Исследование единственности обобщенного решения задачи (1)-(3)

В этом параграфе с помощью неравенства Беллмана доказана следующая теорема о единственности в целом обобщенного решения задачи (1)-(3).

Теорема 2. Пусть

1. $F(t,x,u_1,\ldots,u_6) \in C([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6)$.

2. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^3\times(-\infty,\infty)\times[-R,R]\times(-\infty,\infty)$

$$\left|F(t,x,u_1,\ldots,u_6)-F(t,x,\widetilde{u}_1,\ldots,\widetilde{u}_6)\right|\le C_R\cdot\sum_{i=1}^{6}\left|u_i-\widetilde{u}_i\right|, \qquad (17)$$

где $C_R>0$ – постоянная.

Тогда задача (1)-(3) не может иметь более одного обобщенного решения.

§3. Исследование существования в малом обобщенного решения задачи (1)-(3)

В этом параграфе, комбинированием обобщенного принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке, доказывается следующая теорема существования в малом (т.е. справедливая при достаточно малых значениях T) обобщенного решения задачи (1)-(3).

Теорема 3. Пусть

1. $\varphi(x)\in C^{(2)}([0,\pi]),\ \varphi'''(x)\in L_2(0,\pi)$ и
   $\varphi(0)=\varphi(\pi)=\varphi''(0)=\varphi''(\pi)=0$;
   $\psi(x)\in C([0,\pi]),\ \psi'(x)\in L_2(0,\pi)$ и $\psi(0)=\psi(\pi)=0$.
2. $F(t,x,u_1,\ldots,u_6)\in C([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6)$.
3. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^3\times(-\infty,\infty)\times[-R,R]\times(-\infty,\infty)$

$$\left|F(t,x,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6)-F(t,x,u_1,u_2,u_3,\widetilde{u}_4,u_5,\widetilde{u}_6)\right|\le$$
$$\le C_R\cdot(|u_4-\widetilde{u}_4|+|u_6-\widetilde{u}_6|), \qquad (18)$$

где $C_R>0$ – постоянная.

Тогда существует в малом обобщенное решение задачи (1)-(3).

Доказательство. Так как доказательство данной теоремы очень длинное, то мы ограничимся лишь приведением идеи (схемы) доказательства данной теоремы. Итак, для каждого фиксированного $u\in B^{2,0}_{1,1,T}$ определим в $B^{3,1}_{2,2,T}$ оператор (относительно V) P_u :

$$\mathsf{P}_u(V(t,x))=\widetilde{V}(t,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{V}_n(t)\sin nx, \qquad (19)$$

где

$$\widetilde{V}_n(t)=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\cdot\sin\sqrt{1-\alpha^2}\,n^2t+\cos\sqrt{1-\alpha^2}\,n^2t\right)\cdot e^{-\alpha n^2t}\cdot\varphi_n+\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}\cdot n^2}\times$$

$$\times\sin\sqrt{1-\alpha^2}\,n^2t\cdot e^{-\alpha n^2t}\cdot\psi_n+\frac{2}{\pi\sqrt{1-\alpha^2}\cdot n^2}\cdot\int_0^t\int_0^\pi \hat{\mathrm{O}}_u(V(\tau,x))\sin nx\times$$

$$\times e^{-\alpha n^2(t-\tau)}\cdot\sin\sqrt{1-\alpha^2}\,n^2(t-\tau)dxd\tau \quad (n=1,2,\ldots;\ t\in[0,T]), \tag{20}$$

числа φ_n,ψ_n $(n=1,2,\ldots)$ определены соотношением (11) и

$$\text{Ô}_u(V(t,x))\equiv F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),V_{xxx}(t,x),u_t(t,x),V_{tx}(t,x))\,. \tag{21}$$

Очевидно, что

$$\forall u\in B^{3,1}_{2,2,T}\quad \hat{\text{Ô}}_u(u(t,x))=\mathsf{F}(u(t,x))\,, \tag{22}$$

где оператор F определен соотношением (7).

Из соотношения (20) получаем, что при любом фиксированном $u\in B^{2,0}_{1,1,T}$ $\forall V\in B^{3,1}_{2,2,T}$:

$$\left\|\mathsf{P}_u(V)\right\|^2_{B^{3,1}_{2,2,T}}\equiv\left\|\widetilde{V}\right\|^2_{B^{3,1}_{2,2,T}}\equiv\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{V}_n(t)\sin nx\right\|^2_{B^{3,1}_{2,2,T}}\le a_0+b_0\cdot\int_0^t\int_0^{\pi}\{\hat{\text{Ô}}_u(V(\tau,x))\}^2dxd\tau\,, \tag{23}$$

где

$$a_0\equiv 6\left[\frac{1}{1-\alpha^2}+\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)^2\right]\cdot\left[\sum_{n=1}^{\infty}(n^3\cdot\varphi_n)^2+\sum_{n=1}^{\infty}(n\cdot\psi_n)^2\right], \tag{24}$$

$$b_0\equiv\frac{6}{\pi\cdot\alpha(1-\alpha^2)}\cdot[1+(\alpha+\sqrt{1-\alpha^2})^2], \tag{25}$$

причем конечность a_0 следует из (16) (для $k=3$ и $k=1$).

Далее, в силу структуры пространства $B^{2,0}_{1,1,T}$, $\forall\tau\in[0,T]$ имеем:

$$\left\|u_{x^i\tau^j}(\tau,x)\right\|_{C([0,\pi])}\le\|u\|_{B^{2,0}_{1,1,\tau}}\le\|u\|_{B^{2,0}_{1,1,T}}\quad(0\le i+2j\le 2)\,. \tag{26}$$

Кроме того, при любом $V\in B^{3,1}_{2,2,T}$ $\forall\tau\in[0,T]$:

$$\int_0^{\pi}V^2_{xxx}(\tau,x)dx\le\frac{\pi}{2}\cdot\|V\|^2_{B^{3,1}_{2,2,\tau}},\qquad \int_0^{\pi}V^2_{\tau x}(\tau,x)dx\le\frac{\pi}{2}\cdot\|V\|^2_{B^{3,1}_{2,2,\tau}}\,. \tag{27}$$

В силу (26), для любого $u\in B^{2,0}_{1,1,T}$ существует такое число $R=R_u>0$, что $\forall t\in[0,T]$ и $x\in[0,\pi]$:

$$-R_u\le u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_t(t,x)\le R_u\,. \tag{28}$$

Тогда, в силу (17), $\forall u\in B^{2,0}_{1,1,T}$, $V\in B^{3,1}_{2,2,T}$, $\tau\in[0,T]$ и $x\in[0,\pi]$ имеем:

$$\{\hat{\text{Ô}}_u(V(\tau,x))\}^2\le 2\{[\hat{\text{Ô}}_u(V(\tau,x))-\hat{\text{Ô}}_u(0)]^2+[\hat{\text{Ô}}_u(0)]^2\}\le$$
$$\le 4C^2_{R_u}\cdot\{V^2_{xxx}(\tau,x)+V^2_{\tau x}(\tau,x)\}+2A^2_{R_u}, \tag{29}$$

где A_{R_u} – максимум функции $|F(t,x,u_1,u_2,u_3,0,u_5,0)|$ в замкнутой области $0 \le t \le T$, $0 \le x \le \pi$, $-R_u \le u_1,u_2,u_3,u_5 \le R_u$.

Теперь, пользуясь оценками (29) и (27), из (23) получаем, что при любом фиксированном $u \in B_{1,1,T}^{2,0}$ $\forall V \in B_{2,2,T}^{3,1}$:

$$\|\mathsf{P}_u(V)\|_{B_{2,2,T}^{3,1}} \le a_0 + 2\pi T \cdot b_0 \cdot A_{R_u}^2 + 4\pi T \cdot b_0 \cdot C_{R_u}^2 \cdot \|V\|_{B_{2,2,T}^{3,1}}^2. \tag{30}$$

Из (30) следует, что для любого фиксированного $u \in B_{1,1,T}^{2,0}$ оператор P_u действует в $B_{2,2,T}^{3,1}$, причем ограниченно.

Теперь, пользуясь соотношениями (19), (20), условием (18) (для $R = R_u$) и оценками (27) (для $V = V_1 - V_2$), аналогично (23), методом математической индукции получаем, что при любом фиксированном $u \in B_{1,1,T}^{2,0}$ $\forall V_1, V_2 \in B_{2,2,T}^{3,1}$ и $t \in [0,T]$:

$$\|\mathsf{P}_u^k(V_1) - \mathsf{P}_u^k(V_2)\|_{B_{2,2,t}^{3,1}}^2 \le (2\pi \cdot b_0 \cdot C_{R_u}^2)^k \cdot \|V_1 - V_2\|_{B_{2,2,T}^{3,1}}^2 \cdot \frac{t^k}{k!}, \tag{31}$$

где k – любое натуральное число.

Таким образом, при любом фиксированном $u \in B_{1,1,T}^{2,0}$ $\forall V_1, V_2 \in B_{2,2,T}^{3,1}$:

$$\|\mathsf{P}_u^k(V_1) - \mathsf{P}_u^k(V_2)\|_{B_{2,2,T}^{3,1}} \le q_k(u) \cdot \|V_1 - V_2\|_{B_{2,2,T}^{3,1}}, \tag{32}$$

где

$$q_k(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{k!}} \cdot (2\pi \cdot b_0 \cdot C_{R_u}^2 \cdot T)^{k/2}. \tag{33}$$

Очевидно, что для достаточно больших $k = k_u$: $q_k(u) < 1$. Для таких k оператор P_u^k оказывается сжатым в пространстве $B_{2,2,T}^{3,1}$. Тогда, в силу обобщенного принципа сжатых отображений, единственная в $B_{2,2,T}^{3,1}$ неподвижная точка V оператора P_u^k является и единственной в $B_{2,2,T}^{3,1}$ неподвижной точкой оператора P_u:

$$V = \mathsf{P}_u(V), \quad V \in B_{2,2,T}^{3,1}. \tag{34}$$

Сопоставив каждому $u \in B_{1,1,T}^{2,0}$ единственную в $B_{2,2,T}^{3,1}$ неподвижную точку V оператора P_u порождаем оператор H:

$$H(u) = V = \mathsf{P}_u(V), \tag{35}$$

действующий из $B_{1,1,T}^{2,0}$ в $B_{2,2,T}^{3,1}$.

Далее, показывается, что оператор H действует из $B^{2,0}_{1,1,T}$ в $B^{3,1}_{2,2,T}$ непрерывно и, тем более, он действует в $B^{2,0}_{1,1,T}$ непрерывно.

Теперь покажем компактность оператора H в $B^{2,0}_{1,1,T}$. Пусть $\mathsf{K}=\mathsf{K}_R$ –любой замкнутый шар пространства $B^{2,0}_{1,1,T}$ радиуса R и с центром в нуле. Тогда, в силу (26), очевидно, что при любом $u\in\mathsf{K}_R$ $\forall t\in[0,T]$ и $x\in[0,\pi]$:

$$-R\le u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_t(t,x)\le R\,. \quad (36)$$

Тогда, пользуясь неравенством (18), оценкой (29) (для $R_u=R$) и оценками (27), аналогично (23) получаем, что при любом $u\in\mathsf{K}_R$ $\forall t\in[0,T]$:

$$\|H(u)\|^2_{B^{3,1}_{2,2,t}}\equiv\|V\|^2_{B^{3,1}_{2,2,t}}\equiv\|\mathsf{P}_u(V)\|^2_{B^{3,1}_{2,2,t}}\le a_0+2\pi\cdot b_0\cdot A_R^2\cdot T+4b_0\cdot C_R^2\cdot\pi\cdot\int_0^t\|V\|^2_{B^{3,1}_{2,2,\tau}}d\tau, \quad (37)$$

где числа a_0,b_0 определены соотношениями (24), (25), а A_R – максимум функции $|F(t,x,u_1,u_2,u_3,0,u_5,0)|$ в замкнутой области $0\le t\le T$, $0\le x\le\pi$, $-R\le u_1,u_2,u_3,u_5\le R$.

Из (37), применив неравенство Беллмана, получаем, что $\forall u\in\mathsf{K}_R$:

$$\|H(u)\|^2_{B^{3,1}_{2,2,T}}\equiv\|V\|^2_{B^{3,1}_{2,2,T}}\le\{a_0+2\pi\cdot b_0\cdot A_R^2\cdot T\}\cdot\exp\{4\pi\cdot b_0\cdot C^2_{R_0}\cdot T\}\equiv a_R^2 . \quad (38)$$

Следовательно, множество $H(\mathsf{K}_R)$ ограничено в $B^{3,1}_{2,2,T}$.

Далее, показывается, что при любом $u\in\mathsf{K}_R$ $\forall t\in[0,T]$:

$$|V''_n(t)|\le\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)\cdot n^4\cdot|\varphi_n|+\left(2\alpha+\frac{|2\alpha^2-1|}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)\cdot n^2\cdot|\psi_n|+\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\times$$

$$\times(1+2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}+2\alpha^2)\cdot n^2\cdot T+\frac{2}{\pi}+\left[\frac{2}{\pi\sqrt{1-\alpha^2}}\cdot(1+2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}+\right.$$

$$\left.+2\alpha^2)\cdot n^2\cdot T+\frac{2}{\pi}\right]\cdot(4\pi C_R^2\cdot a_R^2+2\pi\cdot A_R^2)\quad (n=1,2,\ldots), \quad (39)$$

где $H(u)\equiv V=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(t)\sin nx$.

Тогда из (38) и (39) следует, что для каждого фиксированного n $(n=1,2,\ldots)$ семейство

$$(H(\mathsf{K}_R))_n \equiv \left\{V_n(t) : \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t)\sin kx \equiv V(t,x) = H(u(t,x)),\ u \in \mathsf{K}_R\right\} \qquad (40)$$

ограничено в $C^{(2)}([0,T])$ и, следовательно, по теореме Арцела, компактно в $C^{(1)}([0,T])$.

Таким образом, для $H(\mathsf{K}_R)$, рассматриваемого как подмножество пространства $B^{2,0}_{1,1,T}$, выполнено условие а) теоремы 1 для пространства $B^{2,0}_{1,1,T}$ о критерии компактности множеств в этом пространстве. А из оценок

$$\sum_{n=\mathsf{N}}^{\infty} n^2 \cdot \max_{0\le t\le T}|V_n(t)| \le \left(\sum_{n=\mathsf{N}}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \cdot \|V\|_{B^{3,1}_{2,2,T}} \le a_R \cdot \left(\sum_{n=\mathsf{N}}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}, \qquad (41)$$

$$\sum_{n=\mathsf{N}}^{\infty} \max_{0\le t\le T}|V'_n(t)| \le \left(\sum_{n=\mathsf{N}}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \cdot \|V\|_{B^{3,1}_{2,2,T}} \le a_R \cdot \left(\sum_{n=\mathsf{N}}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}, \qquad (42)$$

где N – любое натуральное число, а $a_R \ge 0$ – число, фигурирующее в (38), следует, что для $H(\mathsf{K}_R)$, рассматриваемого как подмножество пространства $B^{2,0}_{1,1,T}$, выполнено условие б) теоремы 1 для пространства $B^{2,0}_{1,1,T}$ о критерии компактности множеств в этом пространстве.

Таким образом, оператор H переводит каждый шар $\mathsf{K}_R \subset B^{2,0}_{1,1,T}$ в множество $H(\mathsf{K}_R)$, компактное в $B^{2,0}_{1,1,T}$. Следовательно, оператор H действует в $B^{2,0}_{1,1,T}$ компактно. Так как оператор H действует в $B^{2,0}_{1,1,T}$ и непрерывно, то он действует в $B^{2,0}_{1,1,T}$ вполне непрерывно.

Далее, в силу оценок (14) (для $i=3, j=1$) и (38), $\forall u \in \mathsf{K}_R$ имеем:

$$\|H(u)\|_{B^{2,0}_{1,1,T}} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|H(u)\|_{B^{3,1}_{2,2,T}} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot a_R =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{6}} \{a_0 + 2\pi \cdot b_0 \cdot A_R^2 \cdot T\}^{1/2} \cdot \exp\{2\pi \cdot b_0 \cdot C_R^2 \cdot T\}. \qquad (43)$$

Из (43) видно, что если число

$$R > \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{a_0} \qquad (44)$$

и фиксировано, то при достаточно малых значениях T

$$\forall u \in \mathsf{K}_R \quad \|H(u)\|_{B^{2,0}_{1,1,T}} \le R,$$

т.е. $H(\mathsf{K}_R) \subset \mathsf{K}_R$.

Таким образом, для любого фиксированного R , удовлетворяющего условию (44), при достаточно малых значениях T оператор H преобразует шар K_R в себя вполне непрерывно. Следовательно, в силу принципа Шаудера о неподвижной точке, при достаточно малых значениях T оператор H имеет в $K_R \subset B^{2,0}_{1,1,T}$ по крайней мере одну неподвижную точку u :

$$u = H(u) . \tag{45}$$

Так как $u = H(u) = V = P_u(V)$, то $u = V$ и, следовательно,

$$u = H(u) = P_u(u) .$$

Тогда, в силу (22),

$$\hat{O}_u(u) = F(u)$$

и, следовательно, для найденной неподвижной точки $u = u(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx$ функции $u_n(t)$ $(n = 1,2,\ldots)$ удовлетворяют системе (10). Кроме того, так как оператор H действует из $B^{2,0}_{1,1,T}$ в $B^{3,1}_{2,2,T}$, то для найденной неподвижной точки $u(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx$ оператора H имеем:

$$u(t,x) \in B^{3,1}_{2,2,T} . \tag{46}$$

Далее, проверяется, что найденная функция $u(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx \in B^{3,1}_{2,2,T}$ является обобщенным решением задачи (1)-(3). Теорема доказана

Замечание. Следует отметить, что условия 1 теоремы 3, наложенные на начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, не только достаточны, но и необходимы для существования обобщенного решения задачи (1)-(3).

§4. Исследование существования в целом обобщенного решения задачи (1)-(3)

В этом параграфе с помощью усиленного принципа Шаудера о неподвижной точке доказана следующая теорема о существовании в целом обобщенного решения задачи (1)-(3).

Теорема 4. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 3.

2. В $[0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6$

$$\left|F(t,x,u_1,\ldots,u_6)\right| \le C\cdot(1+|u_1|+\ldots+|u_6|), \tag{47}$$

где $C > 0$ – постоянная.

Тогда существует обобщенное решение задачи (1)-(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Худавердиев К.И. К теории многомерных смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений. – Дисс...докт. физ.-мат. наук – Баку, 1973г., Азербайджанский Государственный Университет, 319с.

DÖRDÜNCÜ TƏRTİB YARIM-XƏTTİ BİR BUSSİNESK TƏNLİYİ ÜÇÜN BİRÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN ÜMUMİLƏŞMİŞ HƏLLİNİN TƏDQİQİ. I.

M.H.MAHMUDOVA

XÜLASƏ

İş dördüncü tərtib yarım-xətti bir Bussinesк tənliyi üçün birölçülü qarışıq məsələnin ümumiləşmiş həllinin varlığı və yeganəliyi məsələlərinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. Öyrənilən qarışıq məsələnin ümumiləşmiş həllinə tərif verilir. Furye metodunu tətbiq etdiкdən sonra baxılan məsələnin həlli axtarılan $u(t,x)$ həllinin $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ sisteminə görə naməlum $u_n(t)\ (n=1,2,\ldots)$ Furye əmsallarına nəzərən müəyyən qeyri-xətti hesabi inteqro-diferensial tənliкlər sisteminin həllinə gətirilir. Sonra isə baxılan qarışıq məsələnin ümumiləşmiş həllinin qlobal yeganəliyi, loкal və qlobal varlığı haqqında teoremlər isbat edilir.

STUDY OF GENERALIZED SOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR A SEMI-LINEAR FOURTH ORDER BOUSSINESQ EQUATION .I.

M.H.MAHMUDOVA

SUMMARY

This work is dedicated to the study of existence and uniqueness of generalized solution of one-dimensional mixed problem for a semi-linear fourth order Boussinesq equation. Conception of generalized solution for the mixed problem under consideration is introduced. After applying Fourier method, the solution of original problem is reduced to the solution of some countable system of non-linear integro-differential equations in unknown Fourier coefficients $u_n(t)\ \ (n=1,2,\ldots)$ of the sought solution $u(t,x)$ based on the system $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$. Besides, uniqueness theorem in large, existence theorem in small and existence theorem in large for the generalized solution of the mixed problem under consideration are also proved in this work.